ملاحظة 1: من خلال المحاضرة السابقة بينا بأنها إذا كانت الدوال $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ دوال مرتبطة خطياً فإن قيمة محدد فرونسكي يساوي الصفر. أي أن إنعدام محدد فرونسكي هو شرط لازم ولكنه غير كافي كما نؤكد ذلك في المثال وبينا أيضاً من خلال مثال آخر انعدام محدد فرونسكي لا يعني بالضرورة أن الدوال مرتبطة خطياً والمثال كان هو: $y_1 = x^3$ ، $y_2 = |x^3|$.

-2- أثبتنا أيضاً أنه إذا كان لدينا معادلة تفاضلية $L(y)=0$ خطية متجانسة وكان $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ حلول لهذه المعادلة فعندئذ فالشرط اللازم والكافي لكي تكون هذه الدوال مستقلة خطية هو أن يكون محدد فرونسكي $\neq 0$. وإذا كان يساوي صفر فهو مرتبط خطياً هذا يعني أنه إذا كان لدينا حلول للمعادلة تفاضلية $\neq 0$ فإن محدد فرونسكي لا يساوي صفر أما إذا كان لدينا حلول لمعادلة تفاضلية معطاة $=0$ فإن محدد فرونسكي يساوي صفر .

مثال: لتكن لدينا المعادلة تفاضلية :

$$y'' - \frac{1}{x} y' - \frac{3}{x^2} y = 0$$

إن الدالتين : $y_1 = x^3$ ، $y_2 = |x^3|$ هي قاعدة الحلول لهذه المعادلة .

إذاً لكي تتحقق المبرهنة الأخيرة التي درسناها في المحاضرة سابقة يجب أن تكون دوال المعاملات دوال مستمرة .

تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية :

درسنا في معادلات 1 تحويلاً يخفض رتبة المعادلة التفاضلية مرتبة واحدة $Z = \frac{y'}{y}$ أو $y = e^{\int Z dx}$ لكن هذا التخفيض قد لا يؤدي إلى معادلة تفاضلية خطية.

مثال: لتكن لدينا المعادلة :

$$y'' + (1-x) y' + y = 0$$

التحويل $y = e^{\int Z dx}$ $\xLeftarrow{\text{نشتق}}$ $y' = Z \cdot e^{\int Z dx}$ $\Leftarrow$ $y' = yZ$

$$y'' = y'Z + yZ' = yZ^2 + yZ'$$

نعوض في معادلة الأساسية.

SUBJECT:

$(y \div)$

$$yZ^2 + yZ' + (1-x)y\cdot Z + y = 0$$

$$Z^2 + Z' + (1-x)Z + 1 = 0$$

$$Z' + (1-x)Z + Z^2 = -1$$

والمعادلة الناتجة غير خطية لوجود Z^2.

تم تخفيض رتبة المعادلة درجة واحدة لكن المعادلة الناتجة غير خطية.

---

* لتخفيض رتبة معادلة تفاضلية خطية معطاة:

$$(1) \quad P_n(x)\cdot y^{n} + P_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \text{———} + P_1(x)\cdot y' + P_0(x)\cdot y = 0$$

ولنفرض أن $y_1 \neq 0$ حلاً خاصاً لهذه المعادلة غير صفرية عندئذٍ التحويل:

$(2)\ y = y_1 \int u\,dx$ أو $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$ نشتق (2) عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة التفاضلية المعطاة.

المعادلة المعطاة من الدرجة n نشتق n مرة.

$$y' = y_1' \int u\,dx + y_1 \cdot u$$

$$y'' = y_1'' \int u\,dx + 2y_1' \cdot u + y_1 \cdot u'$$

$$y''' = y_1''' \cdot \int u\,dx + y_1'' u + 2y_1'' \cdot u + 2y_1' \cdot u' + y_1' \cdot u' + y_1 \cdot u''$$

$$y''' = y_1''' \int u\,dx + 3y_1'' u + 3y_1' u' + y_1 \cdot u''$$

ونعلم بأن قانون لبنتز للمشتقات العليا هو:

$$(u\cdot v)^{n} = u^{n} \cdot v + n\, u^{n-1} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot u^{n-2} \cdot v'' + \text{———} + u \cdot v^{(n)}$$

وبالتالي فإن:

SUBJECT: / /

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \cdot \int u\,dx + n \cdot y_1^{(n-1)} \cdot u + \frac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} \cdot u' + \text{——} + y_1 \cdot u^{(n-1)}$$

نعوض هذه المشتقات في المعادلة (1) ومن ثم نختصر ونقسم على y_1 فنحصل على معادلة تفاضلية من الشكل:

$$u^{(n-1)} + \beta_{n-1}(x) \cdot u^{(n-2)} + \text{——} + \beta_1(x) \cdot u' + \beta_0(x) \cdot u = 0 \quad (3)$$

وهذه المعادلة كما نلاحظ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة $n-1$ أي تم تخفيض المعادلة المعطاة (1) مرتبة واحدة وذلك من خلال معرفة حل لها ص واحد لا يساوي صفر وهو y_1.

لنفرض أن قاعدة الحلول المعادلة (3) هي:

$u_2 \cdot u_3 \cdot \text{——} u_n$

كما أن هذه الحلول مستقلة خطياً أي أن محدد فرونسكي لا يساوي الصفر عندئذٍ تكون الدوال:

$$y_1, \quad y_2 = y_1 \int u_2\,dx \; ; \quad y_3 = y_1 \int u_3\,dx \text{ ——} \quad y_n = y_1 \int u_n\,dx$$

هي قاعدة الحلول للمعادلة التفاضلية المعطاة (1) وذلك لأن كل دالة من هذه الدوال حل للمعادلة عدد هذه الدوال يساوي رتبة المعادلة التفاضلية المعطاة ويساوي n كما أن أي كل دالة من هذه الدوال هو حل كما أن هذه الدوال مستقلة خطياً لنبين أنها مستقلة من أجل ذلك نفرض جدلاً أن هذه الدوال مرتبطة خطياً عندئذٍ يوجد n من الثوابت العددية $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ وغير معدومة آن واحد بحيث أن: $A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 \text{ ——} A_n \cdot y_n = 0$

وبالتالي فإن:

$$A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_1 \int u_2\,dx + \text{——} + A_n \cdot y_1 \int u_n\,dx = 0$$

أي أن:

$$A_1 + A_2 \int u_2\,dx + \text{——} + A_n \int u_n\,dx = 0$$

باشتقاق هذه العلاقة مرة واحدة بالنسبة لـ x فنجد أن:

$$A_2 \cdot u_2 + \dots\dots + A_n \cdot u_n = 0$$

تتحقق هذه العلاقة من أجل ثوابت لا تساوي الصفر معاً مرتبطة خطياً وهذا خطأ فالدوال $u_2, u_3, \text{——} u_n$ مستقلة بالفرض.

. و بما تشكل قاعدة حلول للمعادلة (2) ما يعني أن الفرض الحلول خاطئ أي أن $y_1, y_1\int u_2 dx$ ——— $y_1\int u_n dx$ مستقلة خطياً.

. وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة (I) هو من الشكل:

$$y_h = c_1 . y_1 + c_2 . y_2 + \text{———} + c_n . y_n$$

. حيث c_1, c_2 ——— c_n ثوابت كيفية.

مثال لتكن لدينا المعادلة تفاضلية التالية:

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

. أوجد الحل العام للمعادلة السابقة إذا علمت أن $y_1 = x$ حل لهذه المعادلة

لتخفيض رتبة المعادلة التفاضلية مرتبة واحدة نجري التغيير على المتغيرات التابع y من الشكل:

$$y = y_1 \int u\, dx \qquad y = x\int u\, dx$$

$$y' = \int u\, dx + x . u$$
$$y'' = 2u + x . u'$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أن:

$$(x-1)(x.u' + 2u) - x\left(\int u\, dx + xu\right) + x\int u\, dx = 0$$

$$(x-1)\, x.u' + 2xu - 2u - x\int u\, dx - x^2 u + x\int u\, dx = 0$$

$$(x-1)\, x.u' - (x^2 - 2x + 2)\, u = 0$$

. هذه المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى متجانسة تعامل معاملة معادلة الخطية منفصلة المتحولات وهذه المعادلة تكتب بالشكل:

$$\frac{u'}{u} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)}$$

ملاحظة: لدينا قوة البسط متساوية قوة المقام نقسم البسط على المقام

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 2 & x^2 - x \\ -x^2 \pm x & 1 \\ \hline 0 \; -x + 2 & \end{array}$$

$$\frac{u'}{u} = 1 + \frac{-x+2}{x^2 - x}$$

$$\frac{u'}{u} = 1 - \frac{x-2}{x(x-1)}$$

لفرق الكسور:

$$(\star) \quad \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)}$$

نضرب ب x فنحصل على:

$$A + \frac{Bx}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$$

من أجل $x=0$ يكون

$$A = \frac{-2}{-1} = 2$$

نضرب $\star$ ب $x-1$ فنجد أن:

$$\frac{A(x-1)}{x} + B = \frac{x-2}{x}$$

نعوض كل x ب 1 فنجد أن:

$$B = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$\frac{u'}{u} = 1 - \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}$$

بالمكاملة نجد:

$$\ln \frac{u}{c} = x - 2\ln x + \ln(x-1)$$

$$\ln \frac{u}{c} = x + \ln \frac{x-1}{x^2}$$ أي $e^{x+\ln \frac{x-1}{x^2}} = e^x \cdot e^{\ln \frac{x-1}{x^2}}$

ومنه فإن

$$\frac{u}{c} = e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$$

$y_2 = y_1 \int u_2 \, dx$

ومن أجل $c=1$ يكون:

$$u_2 = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

ومنه فإن:

$$y_2 = y_1 \int u_2 \, dx = x \int \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right) dx$$

ومنه فإن:
$$y_2 = x\left[\int \frac{e^x}{x}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right]$$

لنحسب قيمة التكامل $\int \frac{e^x}{x^2}dx$ بتكامل بالتجزئة:

نفرض $e^x = u \Leftarrow e^x dx = du$

$\frac{dx}{x^2} = dv \Leftarrow -\frac{1}{x} = v$

$$\int \frac{e^x}{x^2}dx = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}dx$$

نعوض في y_2
$$y_2 = x\left[\int \frac{e^x}{x}dx + \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x}dx\right] = x\left[\frac{e^x}{x}\right] = e^x$$

$$w(y_1, y_2) = w(x \cdot e^x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x \neq 0$$
مستقلة خطياً

عندئذٍ الحل العام $y_h = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = c_1 \cdot x + c_2 \cdot e^x$
حيث c_1 و c_2 هي ثوابت كيفية

★ !

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n:
$$P_n(x) \cdot y^{n} + P_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + \text{———} + P_1(x) \cdot y' + P_0(x) \cdot y = 0 \quad (1)$$

ولنفرض أن علم k حلاً خاصاً ومستقلاً خطياً للمعادلة (1)
أي y_1 و y_2 و ——— , y_k حلول خاصة مستقلة خطياً للمعادلة (1)
عندئذٍ يمكن تخفيض رتبة المعادلة k مرة متتالية أي نحصل معادلة تفاضلية من الرتبة $n-k$: باستخدام y_1 وفق الخطوات السابقة نحصل على معادلة من الرتبة $n-1$

$$(2)\quad u^{n-1} + \beta_{n-2}(x)\, u^{(n-2)} + \dots \beta_1(x)\, u' + \beta_0(x)\, u = 0$$

$$y_2 = y_1 \int u_2\, dx$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int u_2$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = u_2 \qquad u_3 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)' \qquad u_k = \left(\frac{y_k}{y_1}\right)'$$

باستخدام التحويل .

$$u = u_2 \int v\, dx$$

يمكن تخفيض رتبة المعادلة (2) مرتبة واحدة

وذلك بأن نشتق العلاقة عدد من المرات المتتالية يساوي n-1

ثم نعوض بالمعادلة (2) ترتيب المشتقات من المشتقة العليا إلى المشتقة الدنيا

فنحصل على الشكل:

$$(3)\quad v^{(n-2)} + \alpha_{(n-3)}(x)\, v^{(n-3)} + \dots + \alpha_1(x)\, v' + \alpha_0(x)\, v = 0$$

وهذه المعادلة كما نلاحظ هي معادلة تفاضلية

خطية من المرتبة n-2

عندئذٍ تكون الدوال.

$$u_3 = u_2 \int v_3\, dx$$

$$u_4 = u_2 \int v_4\, dx$$

$$u_k = u_2 \int v_k\, dx$$

هي حلول لهذه المعادلة

أي أن :

$$v_3 = \left(\frac{u_3}{u_2}\right)' \qquad v_4 = \left(\frac{u_4}{u_2}\right)' \qquad v_k = \left(\frac{u_k}{u_2}\right)'$$

هي حلول خاصة للمعادلة (3)

باستخدام الدالة v يمكن تخفيض المعادلة (3) مرتبة واحدة من خلال الفرض

SUBJECT: / /

أي: $z = z_3 \int h \, dx$

نشتق العلاقة $n-2$ مرة متتالية نعوض بالمعادلة (3) نحصل على معادلة تفاضلية من الشكل:

$$h^{(n-3)} + \delta_{n-4} \cdot h^{(n-4)} + \text{———} + \delta_1(x) \cdot h' + \delta_0(x) \cdot h = 0$$

نتابع العمل على هذا المنوال نحصل بالأخير على معادلة تفاضلية من الشكل:

$$Z^{(n-k)} + \beta_{n-k-1}(x) \cdot Z^{(n-k-1)} + \text{———} + \beta_1(x) \cdot Z' + \beta_0(x) \cdot Z = 0$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة $n-k$ أي أن تم تخفيض رتبة المعادلة المعطاة k مرة بمعرفة k حلاً مستقلاً للمعادلة معطاة.

لإيجاد الحل العام للمعادلة تفاضلية من الرتبة $n-1$ نوجد $n-1$ حل خاص للمعادلة.

من خلال ما سبق نلاحظ أنه إذا اعطينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ~~و~~ واعطينا حل خاص واحد عندئذٍ يمكن تخفيض رتبة المعادلة المعطاة مرتبة واحدة يمكن إيجاد حل خاص لها.

★ وإذا اعطينا معادلة خطية من رتبة الثالثة وطلب إيجاد الحل العام يلزم أن أعطى حلين خاصين مستقلين خطياً يمكن تخفيض رتبة المعادلة مرتبتين.

★ وإذا أعطينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الرابعة وطلب إيجاد الحل العام يلزم أن أعطى ثلاث حلول خاصة ومستقلة عندئذ يمكن تخفيض رتبة المعادلة ثلاث مراتب متتالية ~~فأحصل~~ فأحصل على معادلة من الرتبة الأولى.

★ بشكل عام إذا أعطينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n وطلب إيجاد الحل العام باستخدام طريقة تخفيض الرتبة يلزم أن أعطى $n-1$ حلاً خاص لأنه باستخدام هذه الحلول الخاصة يمكن تخفيض $n-1$ ~~مرة~~ مرة متتالية فأحصل على معادلة خطية من الرتبة الأولى.

SUBJECT:

مثال: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x \cdot y' - 6y = 0$$

أوجد الحل العام باستخدام طريقة تخفيض الرتبة .

إذا علمت أن $y_1 = x$ و $y_2 = x^3$

هي حلان خاصان لهذه المعادلة . ؟

نفرض أن $y = y_1 \int u\,dx = x \int u\,dx$

$$y' = \int u\,dx + x \cdot u$$

$$y'' = 2u + x \cdot u'$$

$$y''' = 3u' + x \cdot u''$$

نعوض في معادلة تفاضلية فنجد أن:

$$x^3(x u'' + 3u') - 3x^2(x \cdot u' + 2u) + 6x(x \cdot u + \int u\,dx) - 6x\int u\,dx = 0$$

$$x^4 \cdot u'' + 3x^3 u' - 3x^3 \cdot u' - 6x^2 \cdot u + 6x^2 u + 6x\int u\,dx - 6x\int u\,dx = 0$$

$$x^4 \cdot u'' = 0 \Rightarrow u'' = 0 \qquad (2)$$

وهذه المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

والدالة

$$u_2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \left(\frac{x^3}{x}\right)' = (x^2)'$$

$$u_2 = 2x$$

وهذه الدالة هي حل المعادلة (2)

$$u = u_2 \int v\,dx \Rightarrow u = 2x \int v\,dx$$

$$u' = 2\int v\,dx + 2x \cdot v$$

$$u'' = 4v + 2x \cdot v'$$

بالتعويض في (2)

$$2x \cdot v' + 4v = 0 \Rightarrow 2x \cdot v' = -4v$$

معادلة ذات متحولات منفصلة نفصل متحولاتها

$$\frac{v'}{v} = \frac{-2}{x}$$

SUBJECT: / /

بالمكاملة: $\ln \frac{z}{c} = -2\ln x = \ln \frac{1}{x^2}$

أي أن $\frac{z}{c} = \frac{1}{x^2}$

ومن أجل $c=1$ يكون $z_3 = \frac{1}{x^2}$

ومنه يكون $u_3 = u_2 \int z_3 \, dx$

$$u_3 = 2x \int \frac{1}{x^2} dx = -2$$

$$y_3 = y_1 \int u_3 \, dx = x \int -2 \, dx = -2x^2$$

الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y_h = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + c_3 \cdot y_3 = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^2$$

حالة خاصة:

إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية أي

$$(1) \ldots \; y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

وكان y_1 حلاً خاصاً لها عندئذٍ التحويل

$$y = y_1 z$$

حيث z هو متغير تابع جديد يمكننا من الحصول على الحل العام للمعادلة (1)

كما يلي: نشتق هذه المعادلة $y = y_1 z$ مرتين متتاليتين:

$$y' = y_1' z + y_1 z'$$

$$y'' = y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z''$$

نعوض y و y' و y'' في (2) فنجد أن :

(2) $y_1 v'' + [2y_1' + P(x) y_1] v' + [y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1] v = 0$

لكن y_1 حل خاص أي أن

$$y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1 = 0$$

لهذا تأخذ المعادلة (2) الشكل

(3) $y_1 v'' + (2y_1' + P(x) y_1) v' = 0$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ v ومن الرتبة الأولى بالنسبة لـ v'

[redacted] نفرض: $v' = u \Leftarrow v'' = u'$

$$y_1 u' + (2y_1' + P(x) y_1) u = 0$$

كما نلاحظ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى نوجد حلها العام يحتوي ثابت كيفي واحد نعوض في العلاقة $v' = u$ ونكامل نحصل على v نحصل على ثابت آخر نعوض في العلاقة $y = y_1 v$ فيكون هو الحل العام.

مثال توضيحي: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة إذا علمنا أن $y_1 = x^2$ حل خاص لها.

الحل: نفرض أن $y = y_1 v$ أي $y = x^2 v$

$$y' = 2x v + x^2 v'$$

$$y'' = 2v + 4x v' + x^2 v''$$

نعوض في المعادلة المعطاة:

$$x^4 v'' + 4x^3 v' + 2x^2 v - 2x^2 v = 0$$ ÷ x^3

$$x v'' + 4 v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{4}{x} \Rightarrow \ln \frac{v'}{c_1} = -4 \ln x$$

$$\ln \frac{v'}{c_1} = \ln \frac{1}{x^4}$$

SUBJECT: / /

$$u' = \frac{c_1}{x^4}$$

بالمكاملة نجد أن

$$u = c_2 \cdot \frac{1}{x^3} + c_0$$

حيث $c_2 = -\frac{c_1}{3}$

$$y = y_1 \cdot u = x^2 \left(\frac{c_2}{x^3} + c_0 \right)$$

$$= \frac{c_2}{x} + x^2 c_0$$

$y_2 = x^2$ و $y_1 = \frac{1}{x}$